NUMELE________________________________

PRENUMELE______________________________

ŞCOALA________________________________

PROFESOR______________________________

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ IAŞI

TESTARE MATEMATICĂ

CLASA A 10-A

TIMP EFECTIV DE LUCRU 90 DE MINUTE

- **Testul este format din 12 întrebări la care se cer doar răspunsurile. Problemele vor fi rezolvate pe ciornă, iar rezultatele vor fi trecute pe foaia de concurs, în tabelul de la pagina 4. La evaluare, se vor lua în considerare doar rezultatele din tabelul de pe foaia de concurs.**
- **Întrebările 1-4 valorează câte 7 puncte, întrebările 5-8 valorează câte 10 puncte, iar întrebările 9-12 valorează câte 13 puncte.**
- **Timpul de lucru este de 90 de minute.**
- **Nu sunt permise calculatoarele sau orice alte dispozitive de calcul.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

DOAR PENTRU PROFESORII CORECTORI

PROBLEMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	OFICIU	TOTAL	SEMNĂTURA
PUNCTAJ															
PUNCTAJ															

[redacted]

(7p) 1. Se consideră o progresie geometrică cu $a_1 = 3$, iar raţia este $q = 2$. Determinaţi suma primilor 2025 de termeni.

$* * *$

(7p) 2. În planul axelor de coordonate carteziene considerăm punctele $A(-1, 5)$ şi $B(-7, -1)$. Câte puncte M de coordonate întregi verifică relaţia

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = 12?$$

(7p) 3. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{4x - 12}{3x - 6}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Pentru ce valori $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ are loc $0 \leq E(x) \leq 1$?

$* * *$

(7p) 4. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ şi funcţia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f_a(x) = ax^2 - (2a + 2)x + (a + 2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Fie V_a vârful parabolei asociate funcţiei f_a. Determină ecuaţia dreptei pe care se află toate punctele V_a.

$* * *$

(10p) 5. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale pozitive cu $a_1 = 1$. Dacă

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n} = \frac{n + 1}{2} \cdot \sqrt{a_n},\ \forall n \geq 1,$$

calculaţi a_{2025}.

Adaptare OLM, Clasa a IX-a, Gorj, 2008

(10p) 6. Fie M_1 şi M_2 două puncte pe dreapta AB cu proprietatea că $\overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{M_1B}$, iar $\overrightarrow{AM_2} = k\overrightarrow{BM_2}$, unde $k \in \mathbb{R}_+$, cu $k > 1$. Fie M mijlocul segmentului M_1M_2. Pentru ce valoare a lui k punctul M este simetricul lui A faţă de B?

** * **

(10p) 7. Fie $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Dacă $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, calculaţi $\sin(3\alpha)$.

** * **

(10p) 8. Fie triunghiul ABC cu $A(4,8)$, $B(2,2)$ şi $C(9,2)$. Fie punctele $M \in [BC]$, $N \in [CA]$ şi $P \in [AB]$ astfel încât AM, BN şi CP sunt concurente în Q şi:

$$\frac{AP}{PB} + \frac{BM}{MC} + \frac{CN}{NA} = 3.$$

Determinaţi coordonatele punctului Q.

** * **

(13p) 9. Determinaţi cel mai mic număr real x, mai mare sau egal cu 10^{2025}, pentru care are loc egalitatea:

$$\left\{\frac{x+2}{3}\right\} = \left\{\frac{x-3}{4}\right\}.$$

Adaptare OLM, Clasa a IX-a, Mehedinţi, 2008

(13p) 10. Determină câte numere $x \in (1, 2026)$ verifică $[x] \cdot \{x\} \in \mathbb{Z}$, unde prin $[x]$ şi $\{x\}$ am notat partea întreagă, respectiv partea fracţionară, a numărului real x.

Adaptare după Dan Popescu, Suceava, GM 6-7-8/2025

(13p) 11. Fie triunghiul ΔABC cu $AB = 6$, $BC = 3$ şi $AC = 4$. Dacă R este lungimea razei cercului circumscris triunghiului ΔABC, să se calculeze valoarea expresiei $R(\sin(2A) + \sin(2B) + \sin(2C))$.

** * **

(13p) 12. Se consideră punctele distincte A, B, C şi D, unde coordonatele fiecărui punct reprezintă câte o soluţie a sistemului:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2xy - 2y + y^2 = 3 \\ x^2 - 2x - 2xy + 2y + y^2 = 3. \end{cases}$$

Calculaţi aria patrulaterului $ABCD$.

Adaptare după Marin Chirciu, Piteşti, Supliment GM 2014

TESTARE MATEMATICĂ
CLASA A 10-A
RĂSPUNSURI

PROBLEMA	RĂSPUNS
1.	$3\left(2^{2025}-1\right)$
2.	4
3.	$[3,6]$
4.	$x+y=1$
5.	2025^2
6.	$\sqrt{2}$
7.	$-\dfrac{44}{125}$
8.	$(5,4)$
9.	$10^{2025}+3$
10.	$2024+(1+2+\ldots+2024)=2051324$
11.	$\dfrac{455}{144}$
12.	8